

# UM NOVO ALGORITMO NÃO-LINEAR PARA CÁLCULO DA MATRIZ FUNDAMENTAL

JOSÉ A. DE FRANÇA\*, MARCELO R. STEMME†

*\*Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual de Londrina  
Caixa Postal 6025  
86051-990, Londrina, PR, Brasil*

*†Departamento de Automação e Sistemas  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Caixa Postal 476  
88040-970, Florianópolis, SC, Brasil*

Emails: josealexandre@eeol.org, marcelo@das.ufsc.br

**Abstract**— In this paper, a new nonlinear technique for fundamental matrix estimating is proposed. It is based on the virtual parallax algorithm. Beside this, the proposed method is a simple minimization problem because it has a quite reduced search space. Experiments in real images validate the new technique and they show that it has a good performance comparing to others nonlinear algorithms, but with lower computational cost.

**Keywords**— Epipolar Geometry; Stereovision; Fundamental Matrix; Virtual Parallax.

**Resumo**— Neste artigo, um novo método não-linear para cálculo da matriz fundamental é proposto. Este é baseado no método do paralaxe virtual. O método proposto constitui um problema simples de minimização, pois possui um espaço de busca bastante reduzido. Experimentos com imagens reais validam o novo método e mostram resultados semelhantes aos adquiridos com outros algoritmos não-lineares, mas com bem menos custo computacional.

**Palavras-chave**— Geometria Epipolar, Visão Estéreo, Matriz Fundamental, Paralaxe Virtual.

## 1 Introdução

Duas imagens capturadas por um sistema de visão estéreo estão relacionadas pela geometria epipolar (Faugeras and Luong, 2001). Por sua vez, essa geometria é completamente caracterizada por uma matriz  $3 \times 3$ . Se o sistema está calibrado, esta matriz é chamada matriz essencial (Longuet-Higgins, 1981) e pode ser facilmente conhecida à partir das matrizes de projeção das câmeras do par estéreo.

Nos métodos clássicos de calibração, as matrizes de projeção das câmeras são obtidas através do conhecimento prévio das dimensões 3D (Heikkilä, 2000) ou 2D (Zhang, 2000) de algum gabarito de calibração. É desnecessário dizer que, apesar de simples e exatas, as técnicas clássicas de calibração limitam a autonomia do sistema, pois sempre que houver uma mudança nos parâmetros das câmeras, por exemplo, após a realização de um zoom, a inspeção visual deve ser interrompida e o gabarito novamente utilizado para calibrar o sistema. Em vista disso, muitos novos artigos propuseram algoritmos para calibração automática (Sturm, 2001; Dornaika and Chung, 2001) ou sistemas estereoscópicos sem calibração (Hengel, 2000). Nestes casos, a geometria epipolar é descrita pela matriz fundamental, o análogo não-calibrado da matriz essencial, que pode ser estimada à partir de um conjunto inicial de correspondência de pontos.

O primeiro algoritmo para recuperação da geometria epipolar à partir de um conjunto de correspondência de pontos foi proposto por Hesse (1863) e, alguns anos depois, aperfeiçoado por Sturm (1869). Este método utiliza sete correspondências, mas é muito sensível a ruídos e, portanto, não tem aplicação prática. Mais de 100 anos depois, derivado do trabalho de Longuet-Higgins (1981) sobre estimação da matriz essencial, surgiu o método dos 8 pontos. Trata-se de um método simples, direto e que usa redundância para tentar reduzir a influência do ruído. Contudo, apenas após o trabalho de Hartley (1997), o algoritmo de 8 pontos tornou-se exato e bastante popular. Até hoje, é muito utilizado como ponto inicial para algoritmos iterativos.

Baseados no trabalho de Faugeras and Lustman (1988), Boufama and Mohr (1998) propuseram o método do paralaxe virtual para cálculo da matriz fundamental. Este é baseado na estimação da homografia entre duas imagens de um plano virtual e na detecção do paralaxe de pontos não pertencentes a este plano. Infelizmente, a exatidão do método é muito dependente da localização dos pares de correspondência de pontos no plano da imagem.

Neste artigo, exploramos o fato de que o algoritmo de Boufama and Mohr (1998) provê uma boa parametrização da matriz fundamental. Esta funciona bem para epipolos no infinito ou não. As-

sim, um algoritmo não-linear baseado nesta parametrização é proposto. O algoritmo tem a vantagem de minimizar as distâncias dos pontos a reta epipolar correspondente com um espaço de busca muito reduzido, pois envolve apenas cinco variáveis, ou seja, constitui um problema de minimização extremamente simples.

Para garantir que o algoritmo sempre convirja para um mínimo, independente da localização do conjunto de correspondências, o conceito de correspondências virtuais é introduzido. Nesta abordagem, a matriz fundamental usada como ponto de partida para a minimização não-linear fornece o conjunto de correspondências utilizado na formação das bases projetivas necessárias ao algoritmo.

O método proposto foi testado em diversas imagens reais e o seu desempenho comparado com outro algoritmo não-linear. Os testes mostram que o algoritmo proposto alcança uma exatidão próxima as obtidas com outros métodos não-lineares, mas, devido ao espaço de busca reduzido, com um custo computacional bem menor.

O restante deste artigo é dividido como segue. Na seção 2 é apresentada a notação utilizada neste artigo. Em seguida, na seção 3, discute-se métodos utilizados para calcular a matriz fundamental. O método proposto é discutido na seção 4. Os resultados experimentais são apresentados na seção 5 e as conclusões na seção 6.

## 2 Notação

Matrizes são representadas por letras, números ou símbolos em negrito e constantes por letras, números ou símbolos em itálico. Assim, considerando o modelo de câmera *pinhole* (Faugeras and Luong, 2001), as coordenadas de um ponto 3D no sistema de coordenadas do ambiente é apresentado como  $\mathbf{M} = [x, y, z]^T$  e o ponto correspondente na retina da imagem como  $\mathbf{m} = [u, v]^T$ . As coordenadas homogêneas de um ponto  $\mathbf{x} = [x, y, \dots]^T$  são representadas por  $\tilde{\mathbf{x}}$ , isto é,  $\tilde{\mathbf{x}} = [x, y, \dots, t]^T$ . Além disso, uma reta  $ax + by + ct = 0$  é representada por  $\mathbf{l} = [a, b, c]^T$ . Finalmente, usamos a prática notação  $A^{-T} = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$  para toda matriz quadrada inversível.

## 3 Estimação da Matriz Fundamental

A geometria epipolar já foi descrita em numerosos artigos como, por exemplo, (Armangué and Salvi, 2003; Zhang, 1998). Basicamente, dado um ponto  $\mathbf{M}$  no espaço projetivo 3D, a geometria epipolar relaciona as projeções,  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{m}'$ , desse ponto nas imagens  $I$  e  $I'$  respectivamente, pela equação

$$\tilde{\mathbf{m}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}} = 0, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{F}$  é uma matriz  $3 \times 3$  chamada matriz fundamental.

Da equação (1), vemos que matriz fundamental pode ser estimada a partir de um conjunto de correspondência de pontos  $(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}'_i)$ . Desde que  $\mathbf{F}$  tem posto 2 e é definida apenas por um fator de escala, são necessárias, no mínimo, sete correspondências para a sua estimação. Contudo, na prática, dispõe-se de mais correspondências. Assim, pode-se utilizar redundância para aumentar a robustez da solução.

À seguir, são apresentados alguns métodos para cálculo da matriz fundamental. Em especial, o método do paralaxe virtual é descrito em detalhes.

### 3.1 Método do Paralaxe Virtual

Se duas imagens são projeções de um plano  $\Pi$  no espaço projetivo 3D, elas estão relacionadas por uma homografia,  $H_p$ . Para pontos que não pertencem a  $\Pi$ ,  $\tilde{\mathbf{m}}' \neq \lambda H_p \tilde{\mathbf{m}}$ , onde  $\lambda$  é fator de escala desconhecido. Esse fato (que representa o paralaxe) permite estimar um epipolo se  $H_p$  for conhecida (Luong and Faugeras, 1996). Assim, a matriz fundamental pode ser conhecida através da relação

$$\mathbf{F} = [\mathbf{e}']_{\times} \mathbf{H}_p, \quad (2)$$

onde  $[\mathbf{e}']_{\times}$  é a matriz anti-simétrica que representa o produto cruzado com  $\tilde{\mathbf{e}}'$ .

O método do paralaxe virtual proposto por Boufama and Mohr (1998) é baseado na equação (2), mas dispensa o conhecimento prévio de um plano. Para isto, são necessárias inicialmente três correspondências de pontos  $(\tilde{\mathbf{m}}_i, \tilde{\mathbf{m}}'_i)$ ,  $i = 1, 2$  e  $3$ . Com essas correspondências, pode-se formar duas bases projetivas, ou seja,  $B = \{\tilde{\mathbf{m}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{m}}_3, \tilde{\mathbf{m}}_0\}$  e  $B' = \{\tilde{\mathbf{m}}'_1, \dots, \tilde{\mathbf{m}}'_3, \tilde{\mathbf{m}}'_0\}$ , onde  $\tilde{\mathbf{m}}_0 = \tilde{\mathbf{m}}_1 + \tilde{\mathbf{m}}_2 + \tilde{\mathbf{m}}_3$  e  $\tilde{\mathbf{m}}'_0 = \tilde{\mathbf{m}}'_1 + \tilde{\mathbf{m}}'_2 + \tilde{\mathbf{m}}'_3$ .

No sistemas de coordenadas definido por  $B$  e  $B'$ ,  $\mathbf{H}_p$  tem a forma

$$\mathbf{H}_p = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes desconhecidas e não-nulas.

Assim, considerando a equação (2) e  $\tilde{\mathbf{e}}' = [e'_u, e'_v, e'_t]^T$ , a matriz fundamental,  $\hat{\mathbf{F}}$ , do sistema de coordenadas é dada por

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta e'_t & e'_y \\ \alpha e'_t & 0 & -e'_x \\ -\alpha e'_y & -\beta e'_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Agora,  $\hat{\mathbf{F}}$  pode ser estimada através de um método linear (veja (Boufama and Mohr, 1998) para mais detalhes), semelhante ao método dos oito pontos, mas que necessita de apenas cinco correspondências de pontos.

Supondo que o novo sistema de coordenadas relacione-se com o sistema original pelas transformações projetivas  $\mathbf{T}_p$  e  $\mathbf{T}'_p$ , respectivamente, na

imagem  $I$  e  $I'$ , a matriz fundamental,  $\mathbf{F}$ , do sistema de coordenadas original é dado por

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}_p'^T \widehat{\mathbf{F}} \mathbf{T}_p. \quad (5)$$

O método do paralaxe virtual possui diversas vantagens. Primeiro, a mudança no sistema de coordenadas reduz a dimensão do problema. Com isso, apenas cinco parâmetros necessitam ser estimados. Então, obtemos uma solução resolvendo um problema simples de autovetor de dimensão  $5 \times 5$ . Além disso, a equação (4) sempre produz uma matriz fundamental de posto 2, portanto esta restrição não precisa ser imposta *a posteriori* como no algoritmo dos 8 pontos (Hartley, 1997).

Se os pontos que formam as bases  $B$  e  $B'$  estiveram bem localizados, a mudança no sistema de coordenadas funciona como uma normalização semelhante a proposta por Hartley (1997) para o algoritmo de 8 pontos. Segundo Boufama and Mohr (1998), isto acontece quando os pontos estão bem espalhados pela imagem e o centróide do triângulo formado pelos pontos  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_3$  ( $\mathbf{m}'_1, \dots, \mathbf{m}'_3$ ) na imagem  $I$  (imagem  $I'$ ) está próximo do centróide do conjunto total de pontos utilizados para encontrar  $\widehat{\mathbf{F}}$ .

### 3.2 Método Não-Linear

Na estimação da matriz fundamental, melhores resultados podem ser obtidos utilizando-se métodos não-lineares que minimizem um critério fisicamente mensurável (Zhang, 1998). Contudo, isto não pode ser realizado com métodos lineares.

Durante o processo de minimização, a única informação disponível são os pares de correspondências  $(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}'_i)$ . Assim, o critério a ser minimizado deve ser algo medido no plano de imagem. Uma possibilidade é minimizar a distância dos pontos a sua reta epipolar correspondente, ou seja,

$$\min_{\mathbf{F}} \sum_i [d^2(\tilde{\mathbf{m}}'_i, \mathbf{F}\tilde{\mathbf{m}}_i) + d^2(\tilde{\mathbf{m}}_i, \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{m}}'_i)], \quad (6)$$

onde  $d(\tilde{\mathbf{x}}_i, \mathbf{l}_i)$  é a distância euclidiana do ponto  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  à reta  $\mathbf{l}_i$ .

Uma minimização como a da equação (6) requer uma parametrização da matriz fundamental que imponha a restrição de posto 2 (Hartley and Zisserman, 2000). Uma parametrização possível foi proposta por Luong et al. (1993). Nesta, considerando as coordenadas dos epipolos  $e = (e_u, e_v)$  e  $e' = (e'_u, e'_v)$ , respectivamente, em  $I$  e  $I'$ ,  $\mathbf{F}$  é expressa por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & b & -ae_u - be_v \\ c & d & -ce_u - de_v \\ -ae'_u - ce'_v & -be'_v - de'_v & F_{33} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes e  $F_{33} = (ae_u + be_v)e'_u + (ce_u + de_v)e'_v$ .

Na equação (7), a coluna 3 de  $\mathbf{F}$  foi expressa como combinação linear das colunas 1 e 2. Além disso, a linha 3 é uma combinação linear das linhas 1 e 2. Dessa forma, a parametrização (7) é simétrica e tem posto 2. Contudo, em alguns casos especiais (Csurka et al., 1997), não é possível expressar a coluna 3 como uma combinação linear das colunas 1 e 2 (o mesmo pode ser dito com relação as linhas). Neste caso, uma outra parametrização, considerando um outro par de linhas\colunas como sendo independentes, deve ser utilizada. Assim, já que a matriz fundamental possui 3 linhas e 3 colunas, existem um total de 9 mapas de busca para a minimização. Além disso, para levar em consideração que  $\mathbf{F}$  é definida por um fator de escala, (7) é dividida pelo maior dentre  $a, b, c$  e  $d$ . Isto fornece mais 4 mapas de busca. Levando em consideração todas as combinações possíveis para a parametrização (7), temos um total de 36 mapas de busca. Evidentemente, isto nos conduz a um algoritmo incomodo e de custo computacional elevado.

Csurka et al. (1997) demonstraram que, dentre os 36 mapas de busca possíveis, o melhor é aquele que maximiza a norma dada por

$$(ad - bc)^2 \sqrt{(e_u^2 + e_v^2 + 1)(e'_u{}^2 + e'_v{}^2 + 1)}. \quad (8)$$

Apesar dos inconvenientes, o método com 36 mapas de busca fornece uma solução muito próxima da ótima (Faugeras and Luong, 2001; Hartley and Zisserman, 2000; Zhang, 1996). Por isso, ele é utilizado para testar a eficiência do método proposto.

## 4 Método Proposto

Como dito na seção 3.1, o método do paralaxe virtual provê uma parametrização da matriz fundamental com apenas 5 variáveis e que garante a restrição de posto 2. Por isso, propomos estimar a matriz fundamental minimizando a distância dos pontos à reta epipolar correspondente [equação (6)], mas com a parametrização da equação (4). Esta abordagem tem a vantagem de constituir um problema de minimização bem mais simples que o da seção 3.2, pois envolve a estimação de apenas 5 parâmetros e possui apenas um mapa de busca.

O problema da técnica é a escolha dos pontos que formaram as bases projetivas necessárias à estimação (seção 3.1). Como sugerido por Boufama and Mohr (1998), em cada imagem, os 3 pontos que compõem a base projetiva devem estar bem espaçados. Além disso, o centróide do triângulo formado por esses pontos deve estar próximo ao centróide do retângulo que envolve o conjunto total de correspondências. De fato, pode-se comprovar experimentalmente que o algoritmo do paralaxe virtual produz melhores resultados quando a localização dos pontos que formam a base projetiva é semelhante ao esquema da figura 1. Neste,

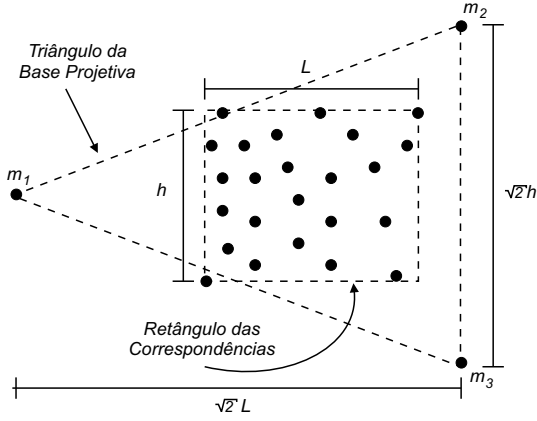


Figura 1: Base projetiva ideal para o algoritmo paralaxe virtual.

o triângulo formado pela base projetiva tem área igual à do retângulo que envolve o restante dos pontos. Além disso, o centróide do triângulo está nas mesmas coordenadas do centróide do retângulo. Contudo, na prática, é muito pouco provável encontrar 3 pontos, dentre o conjunto total de correspondência, que possam formar uma base projetiva ideal semelhante ao esboçado na figura 1.

Desde que, como todo método não-linear, o método proposto necessita de uma estimativa inicial,  $\mathbf{F}_0$ , da matriz fundamental, podemos usar esta estimativa para conseguir pares de correspondências “virtuais” com as características esboçadas na figura 1. Isto pode ser realizado como segue:

1. Considerando apenas a imagem  $I$ , calcula-se a altura  $h$  e a largura  $L$  do retângulo que envolve o conjunto de correspondências em  $I$ . Neste caso, para que o triângulo e o retângulo da figura 1 tenham mesma área e centróide, podemos colocar seus vértices nas coordenadas  $\mathbf{m}_1 = [\bar{u} - 2\sqrt{2}L/3, \bar{v}]^T$ ,  $\mathbf{m}_2 = [\bar{u} + \sqrt{2}L/3, \bar{v} + h]^T$  e  $\mathbf{m}_3 = [\bar{u} + \sqrt{2}L/3, \bar{v} - h]^T$ , onde consideramos o centróide do retângulo igual a  $\mathbf{c}_r = [\bar{u}, \bar{v}]^T$ ;
2. Assim, os pontos que formam a base projetiva em  $I'$  podem ser:  $\mathbf{m}'_1$  igual a intersecção da reta  $[1, 0, -\bar{u}' + 2\sqrt{2}L'/3]^T$  com a reta epipolar  $\mathbf{l}'_1 = \mathbf{F}_0 \tilde{\mathbf{m}}_1$ ,  $\mathbf{m}'_2$  igual a intersecção da reta  $[1, 0, -\bar{u}' - \sqrt{2}L'/3]^T$  com a reta  $\mathbf{l}'_2 = \mathbf{F}_0 \tilde{\mathbf{m}}_2$ , e  $\mathbf{m}'_3$  igual a intersecção da reta  $[1, 0, -\bar{u}' + \sqrt{2}L'/3]^T$  com a reta  $\mathbf{l}'_3 = \mathbf{F}_0 \tilde{\mathbf{m}}_3$ . Aqui,  $L'$  é a largura do retângulo que envolve as correspondências em  $I'$  e  $\bar{u}'$  é a abscissa do centróide do conjunto de correspondências em  $I'$ .

Agora, alguns comentários podem ser feitos:

- O item 1 garante que o triângulo formado pelos pontos  $\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{m}_2$  e  $\mathbf{m}_3$  tenha a mesma área e centróide das correspondências em  $I$ ;

- Devido à simetria da matriz fundamental, à largura  $L'$  e à abscissa  $\bar{u}'$ , o item 2 garante para a  $I'$  uma configuração próxima ao esboço da figura 1;
- Se  $\mathbf{F}_0$  for uma boa estimativa da matriz fundamental, os pares virtuais  $(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}'_i)$  funcionam como correspondências com ruído. Neste caso, o algoritmo proposto deve ser capaz de lidar com este problema. Contudo, se  $\mathbf{F}_0$  for uma estimativa grosseira, os pares funcionam como falsas correspondências e não teremos resultados satisfatórios;

Com as bases projetivas formadas pelas correspondências virtuais, o conjunto de correspondências deve ser convertido para o novo sistema de coordenadas. Em seguida, utilizando a parametrização da equação (4), a equação (6) deve ser resolvida utilizando algum método não-linear. Por último, a matriz fundamental deve ser convertida para o sistema de coordenadas original através da equação (5).

Na próxima seção, o algoritmo proposto é testado e comparado com o algoritmo da seção 3.2.

## 5 Resultados Experimentais

A metodologia utilizada nos experimentos foi a seguinte.

1. As correspondências de pontos foram estabelecidas através de uma técnica automática desenvolvida por nós e descrita em (de França et al., 2004).
2. Dentre as  $N$  correspondências disponíveis, selecionamos aleatoriamente 90 subconjuntos de correspondências. O número de correspondências,  $n(j)$ , de um subconjunto  $j$  é dado por

$$n(j) = (j + 7), \quad j = 1, \dots, 90. \quad (9)$$

3. Para cada subconjunto  $j$ , a matriz fundamental foi estimada pelo método proposto e pelo método descrito na seção 3.2. Em ambos os casos, utilizamos o algoritmo de 8 pontos para fornecer a estimativa inicial e o método Levenberg-Marquardt (Press et al., 1992) para resolver o problema de otimização.
4. Para cada matriz fundamental estimada,  $\mathbf{F}_j$ , calculamos o resíduo dado por

$$r^2(\mathbf{F}_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d^2(\tilde{\mathbf{m}}'_i, \mathbf{F}_j \tilde{\mathbf{m}}_i) + d^2(\tilde{\mathbf{m}}_i, \mathbf{F}_j^T \tilde{\mathbf{m}}'_i). \quad (10)$$

Este resíduo foi utilizado como medida da qualidade da matriz fundamental estimada.

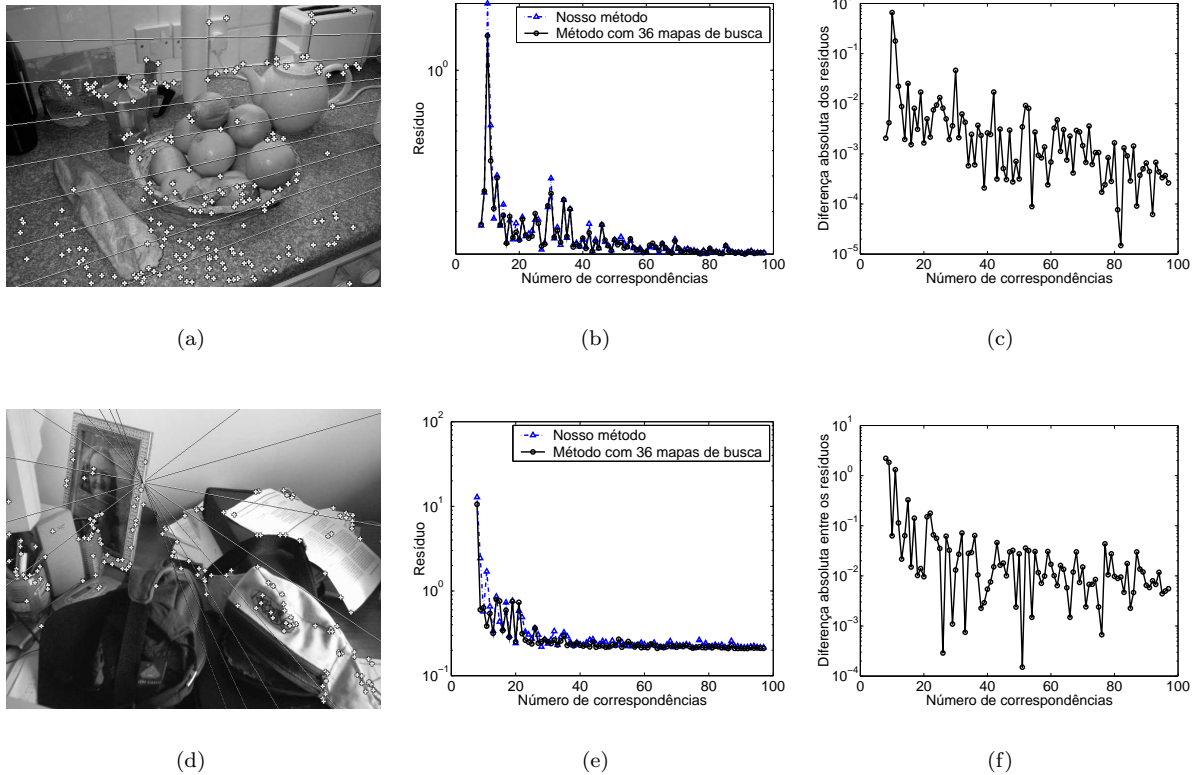


Figura 2: (a) “Cozinha”: uma das imagens de um par estéreo (epipolos no infinito); (b) gráfico do ajuste da matriz fundamental estimada pelos dois métodos testados em função do número de pontos para a imagem “cozinha”; (c) diferença absoluta dos ajustes dos dois métodos para a imagem “cozinha”; (d) “Escritório”: uma das imagens de outro par estéreo (epipolos próximo ao centro da imagem); (e) gráfico do ajuste para a imagem “escritório”, e; (f) diferença absoluta dos ajustes dos dois métodos para a imagem “escritório”.

5. Para medir a exatidão do algoritmo proposto, também foi calculada a diferença

$$\sigma^2(j) = |r_5^2(\mathbf{F}_j) - r_{36}^2(\mathbf{F}_j)|, \quad (11)$$

onde  $r_5^2$  e  $r_{36}^2$  são, respectivamente, o resíduo do método proposto e o do método da seção 3.2.

Esta metodologia foi aplicada a diversos pares de imagens. Na figura 2, apresentamos os resultados para dois pares. Um dos pares tem os epipolos no infinito [par “cozinha”, ilustração na figura 2(a)] e o outro, epipolos próximo ao centro da imagem [par “escritório”, figura 2(d)]. Para o par “cozinha”, foi utilizado um conjunto de 220 correspondências. Já para o par “escritório”, o número de correspondências foi de 165.

O resíduo [equação (10)] em função do número de pontos,  $n(j)$ , é apresentado nas figuras 2(b) (para o par “cozinha”) e 2(e) (para o par “escritório”). Além disso, nas figuras 2(c) e 2(f), apresentamos os gráficos de  $\sigma^2(j)$  em função de  $n(j)$  para, respectivamente, o par “cozinha” e o par “escritório”. Desde que, para um pequeno número de correspondências, o resíduo é muito elevado, todos os gráficos são apresentados em escala logarítmica para melhor visualização.

Analisando os resultados da figura 2, observamos que, com subconjuntos com 15 ou menos correspondências, o algoritmo proposto não obtém uma boa estimativa de  $\mathbf{F}$ . Isto ocorre porque, nestes casos, o algoritmo de 8 pontos não provê uma boa estimativa inicial. Assim, como discutido na seção 4, as correspondências virtuais funcionam como falsas correspondências. Contudo, à medida que o número de correspondências incluídas nos subconjuntos aumenta, a estimativa obtida pelo nosso algoritmo é tão boa quanto a obtida pelo algoritmo da seção 3.2. No entanto, nosso algoritmo é mais eficiente, pois tem custo computacional menor e rápida convergência. Na média, nosso algoritmo precisa de apenas 5 iterações para convergir. Contudo, devido a sua natureza complexa, o outro algoritmo testado precisa em torno de 700 iterações.

## 6 Conclusão

Apresentamos um novo método não-linear para cálculo da matriz fundamental. Para impor a restrição de posto 2, o método usa uma parametrização bastante simples para a matriz fundamental.

Esta tem a vantagem de possuir um espaço de busca reduzido, com apenas cinco variáveis desconhecidas. Testes experimentais mostram que o novo método obtém resultados muito bons para um conjunto de correspondências igual ou maior a 15. Neste caso, a qualidade da matriz fundamental estimada é tão boa quanto a de outros métodos não-lineares. Contudo, os resultados são obtidos a um baixo custo computacional e com rápida convergência. Assim, desde que, na maioria dos casos, não é difícil estabelecer mais que 15 correspondência entre imagens estereoscópicas, a técnica proposta constitui um método rápido e exato para a estimação da matriz fundamental.

### Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES e à CPG-UEL pelo financiamento das pesquisas e ao professor Eduardo Camponogara do DAS-UFSC pelos comentários esclarecedores.

### Referências

- Armangué, X. and Salvi, J. (2003). Overall view regarding fundamental matrix estimation. *Image and Vision Computing*, 21:205–220.
- Boufama, B. S. and Mohr, R. (1998). A stable and accurate algorithm for computing epipolar. *Intern. Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 12(6):817–840.
- Csurka, G., Zeller, C., Zhang, Z., and Faugeras, O. (1997). Characterizing the uncertainty of the fundamental matrix. *Computer Vision and Image Understanding*, 68(1):18–36.
- de França, J. A., França, M. B. M., and Stemmer, M. R. (2004). Stereo-based detection and localization of obstacles in indoor environments. In *VI Induscon*, Joinville, Brazil. In press. Available at <http://research.eeol.org/publications/>.
- Dornaika, F. and Chung, R. (2001). An algebraic approach to camera self-calibration. *Computer Vision and Image Understanding*, 83:195–215.
- Faugeras, O. and Luong, Q.-T. (2001). *The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern the Formation of Multiple Images of a Scene and Some of Their Applications*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Faugeras, O. and Lustman, F. (1988). Motion and structure from motion in a piecewise planar environment. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2(3):485–508.
- Hartley, R. (1997). In defence of the eight point algorithm. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(6):580–593.
- Hartley, R. and Zisserman, A. (2000). *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press.
- Heikkilä, J. (2000). Geometric camera calibration using circular control points. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(10):1066–1076.
- Hengel, A. (2000). *Robust estimation of structure from motion in the uncalibrated case*. PhD thesis, Dept. of Computer Science, University of Adelaide.
- Hesse, O. (1863). Die cubische gleichung, von welcher die lösung des problems der homographie von m. chasles abhängt. *J. reine angew. Math*, 13(62):188–192.
- Longuet-Higgins, H. (1981). A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. *Nature*, 293(10):133–135.
- Luong, Q. T., Deriche, R., Faugeras, O., and Papadopoulos, T. (1993). On determining the fundamental matrix : analysis of different methods and experimental results. Technical Report RR-1894, INRIA.
- Luong, Q.-T. and Faugeras, O. (1996). The fundamental matrix: theory, algorithms, and stability analysis. *The International Journal of Computer Vision*, 17(1):43–76.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- Sturm, P. (2001). Critical motion sequences for monocular self-calibration and uncalibrated euclidean reconstruction. *Image and Vision Computing*, 20:415–426.
- Sturm, R. (1869). Das problem der projektivität und seine anwendung auf die flächen zweiten. In *Math. Ann. 1*, pages 533–574.
- Zhang, Z. (1996). Determining the epipolar geometry and its uncertainty: A review. Technical Report RR-2927, INRIA.
- Zhang, Z. (1998). Determining the epipolar geometry and its uncertainty: a review. *The International Journal of Computer Vision*, 27(2):161–195.
- Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(11):1330–1334.